

Aula 9 - Conservação de energia e translação temporal, Teo de Noether

Def: a Integral de Jacobi de um sistema c/ lagrangeana L é

$$h(q, \dot{q}, t) = \sum_n \dot{q}_n \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_n} - L$$

Essa quantidade tem a seguinte propriedade importante:

$$\begin{aligned} \frac{dh}{dt} &= \sum_n \left[\cancel{\ddot{q}_n} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_n} + \dot{q}_n \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_n} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_n} \dot{q}_n - \cancel{\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_n} \ddot{q}_n} \right] - \frac{\partial L}{\partial t} \\ &= \sum_n \dot{q}_n \left(\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_n} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_n} \right) - \frac{\partial L}{\partial t} \end{aligned}$$

Assim se o sistema obedece às eqs. de Lagrange, segue que $\boxed{\frac{dh}{dt} = -\frac{\partial L}{\partial t}}$

Em particular, se L não depende explicitamente de t (ie, é invariante por translações temporais), então h é conservado!

Veremos a seguir que, em muitos casos, h pode ser identificado com a energia total do sistema. Nesses casos podemos assim identificar a conservação da energia com a invariância temporal do sistema.

Para ver isto, considere a expressão da energia cinética de um sistema de n partículas em um sistema de coordenadas generalizadas arbitrário: se $\vec{r}_i = \vec{r}_i(q, t)$ é a posição da partícula i , então

$$T = \frac{1}{2} \sum_i m_i v_i^2 = \frac{1}{2} \sum_i m_i \left(\frac{d\vec{r}_i}{dt} \right) \cdot \left(\frac{d\vec{r}_i}{dt} \right) = \frac{1}{2} \sum_i m_i \left(\sum_k \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_k} \dot{q}_k + \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial t} \right) \cdot \left(\sum_l \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_l} \dot{q}_l + \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial t} \right)$$

$$= M_0 + \sum_k M_k \dot{q}_k + \frac{1}{2} \sum_{kl} M_{kl} \dot{q}_k \dot{q}_l$$

onde $M_0 = \frac{1}{2} \sum_i m_i \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial t} \cdot \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial t}$; $M_k = \sum_i m_i \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_k} \cdot \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial t}$; $M_{kl} = \sum_i m_i \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_k} \cdot \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_l} = M_{lk}$

em outras palavras, T é sempre um polinômio de 2º grau nas velocidades generalizadas

Suponha agora que : i) $L = T - V(q, t)$ e ii) $\frac{\partial \vec{r}_i}{\partial t} = 0, \forall i$

(a 2ª condição exclui vínculos que façam alguma coordenada ter uma dependência explícita com t)

Nesse caso : $T = \frac{1}{2} \sum_{kl} M_{kl} \dot{q}_k \dot{q}_l$ é um polinômio homogêneo de 2º grau, e

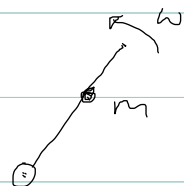
$$h = \sum_j \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} \dot{q}_j - L = \sum_j \left[\frac{1}{2} \sum_{k \neq j} M_{kj} \dot{q}_k + \overbrace{\sum_k M_{jk} \dot{q}_k}^{= M_{jj}} + M_{jj} \dot{q}_j \right] \dot{q}_j = \sum_{jk} M_{jk} \dot{q}_k \dot{q}_j - L$$

$$= 2T - (T - V) = T + V = E_{\text{Tot}} !$$

É importante frisar que as condições para h ser ou não igual a E_{TOT} são independentes daquelas que garantem a conservação de alguma dessas qtdes. Por exemplo, se $L = T - V(\vec{r}, t)$ e $\frac{\partial \vec{r}_i}{\partial t} = 0$ mas V depende explicitamente de t , então $h = E_{\text{TOT}}$ mas não é conservado.

Também é possível ter $h \neq E_{\text{TOT}}$ mas h conservado e E_{TOT} não.

Exemplo (1.5.2): partícula numa haste giratória



$$L = T = \frac{1}{2} m [\dot{r}^2 + r^2 \dot{\theta}^2], \text{ vínculo } \dot{\theta} = \omega = \text{cte} \rightarrow \theta = \theta_0 + \omega t \quad (\text{holônomo mas dep. de } t)$$

substituindo diretamente: $L = \frac{1}{2} m [\dot{r}^2 + \omega^2 r^2] \rightarrow \boxed{\ddot{r} = \omega^2 r}$

(partícula acelerada radialmente para fora, com acel. que aumenta com r ("força centrífuga"))

$$\rightarrow r = A \cosh[\omega t + \phi_0] = a e^{\omega t} + b e^{-\omega t}$$

Nesse sistema: L independe de $t \rightarrow h$ é conservado

$$\text{Mas: } h = \frac{\partial L}{\partial \dot{r}} \dot{r} - L = \frac{1}{2} m \dot{r}^2 - \frac{1}{2} m \omega^2 r^2 \neq E_{\text{TOT}} = T = L$$

$$\text{checando: } \frac{dh}{dt} = m \dot{r} \ddot{r} - m \omega^2 r \dot{r} = m \dot{r} [\omega^2 r - \omega^2 r] = 0$$

Note ainda que, com essa "integral primeira", o problema se reduz de uma eq. dif de 2ª ordem p/ uma de 1ª: $\dot{r}^2 = \omega^2 r^2 + C$

$$(\text{solução: } t - t_0 = \int \frac{dr}{\sqrt{\omega^2 r^2 + C}})$$

Resumindo:

$$\text{Cond. suficientes p/ termos } h = E_{\text{TOT}} : \begin{cases} L = T - V(\vec{q}, t) \\ \text{definições dos } q_k \text{ não} \\ \text{dependem explicitamente de } t \end{cases}$$

$$\text{Cond. necessária e suf.} \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial L}{\partial t} = 0 \end{array} \right.$$

para h ser conservado:
(num sistema holônomo)

Uma cond. pode ser satisfeita sem a outra

Generalização: vimos nas aulas 2 e 6 que, no caso do sistema conter forças que não podem ser incluídas na Lagrangiana, vale a eq.

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_k} = Q_k, \text{ onde } Q_k \text{ é a força generalizada correspondendo à variável}$$

q_k . Assim, temos em geral

$$\frac{dh}{dt} = \sum_k Q_k \dot{q}_k - \frac{\partial L}{\partial t}$$

Como $Q_k dq_k$ é o trabalho realizado por essa força num deslocamento dq_k , podemos interpretar $Q_k \dot{q}_k$ como a potência transmitida ao sistema pela fça gen. Q_k .

Mesmo que $\frac{\partial L}{\partial t} = 0$, se essa potência for $\neq 0$ h não será conservado.

Note ainda que, no caso onde $Q_k = \sum_{l=1}^p \lambda_l a_{lk}(q,t)$ representa uma força de vínculo proveniente de vínculos lineares $\sum_k a_{lk} \dot{q}_k + a_{lt} = 0$, então

$$\frac{dh}{dt} = \sum_{l=1}^p \lambda_l \sum_k a_{lk} \dot{q}_k - \frac{\partial L}{\partial t} = \sum_{l=1}^p \lambda_l a_{lt} - \frac{\partial L}{\partial t}$$

Assim, h continuará conservado se $\frac{\partial L}{\partial t} = 0$ e $a_{lt} = 0, \forall l$ (ie, se os vínculos só relacionarem deslocamentos infinitesimais nas coordenadas, e não no tempo).

Teorema de Noether

- Associa qtdes conservadas com propriedades de simetria da ação

Def a transf. infinitesimal $t \rightarrow t' = t + \epsilon X(q(t), t)$
 $q_i(t) \rightarrow q'_i(t') = q_i(t) + \epsilon \Psi_i(q_i(t), t)$

ϵ = parâmetro infinitesimal arbitrário

→ inclui como casos especiais as translações espaciais / temporais, rotações espaciais, etc.

o Teorema de Noether afirma que para cada transf. infinitesimal que não altera a ação está associada uma qtd. conservada

Teo: Se S é invariante sob a transf. infinitesimal acima, então a qtd.

$$C = \sum_{k=1}^n \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} (\dot{q}_k X - \Psi_k) - L X = \sum_{k=1}^n \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \Psi_k - h X \quad \text{é conservada}$$

Demo: A variação da ação sob a transf. infinitesimal é

$$\Delta S = \int_{t_1}^{t_2} L(\dot{q}'(t'), \dot{q}'(t'), t') dt' - \int_{t_1}^{t_2} L(q, \dot{q}(t), t) dt$$

precisamos mudar de variável no 1º termo, e impor que $\Delta S = 0$ p/ todo $\epsilon > 0$

$$\rightarrow \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{\Delta S}{\epsilon} = 0$$

mantendo apenas termos

em 1ª ordem em ϵ : $\frac{dt'}{dt} = 1 + \epsilon \dot{X} \rightarrow \frac{dt}{dt'} = (1 + \epsilon \dot{X})^{-1} \sim 1 - \epsilon \dot{X}$

$\equiv \xi_i$

e $\frac{dq'_i}{dt'} = \frac{dt}{dt'} \frac{dq'_i}{dt} = (1 - \epsilon \dot{X})(\dot{q}_i + \epsilon \dot{\psi}_i) = \dot{q}_i + \epsilon (\dot{\psi}_i - \dot{q}_i \dot{X})$

$$\rightarrow \Delta S = \int_{t_1}^{t_2} L(q + \epsilon \psi, \dot{q} + \epsilon \xi, t + \epsilon X)(1 + \epsilon \dot{X}) - L(q, \dot{q}, t) dt$$

$$= \int_{t_1}^{t_2} \left[L + \sum_{i=1}^n \left[\frac{\partial L}{\partial q_i} \cdot \epsilon \psi_i + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \cdot \epsilon \xi_i \right] + \frac{\partial L}{\partial t} \cdot \epsilon X \right] (1 + \epsilon \dot{X}) - L dt$$

$$= \epsilon \int_{t_1}^{t_2} \left\{ \left[\sum_i \frac{\partial L}{\partial q_i} \psi_i + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \xi_i \right] + \frac{\partial L}{\partial t} X + L \dot{X} \right\} dt + \int_{t_1}^{t_2} \cancel{L - L} dt + O(\epsilon^2)$$

$\therefore$ Como deve se anular p/ todo ϵ e todo intervalo de integração

$$N \equiv \sum_i \frac{\partial L}{\partial q_i} \psi_i + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \xi_i + \frac{\partial L}{\partial t} X + L \dot{X} = 0 \quad \text{cond. de Noether}$$

Para demonstrar o teorema, basta agora mostrar que na verdade $N = -\frac{dC}{dt}$

usando $\mathcal{F}_i = \psi_i - \dot{q}_i X$ e $\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} = \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right)$:

$$N = \sum_i \left[\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) \psi_i + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \psi_i - \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \dot{q}_i X \right] + \frac{\partial L}{\partial t} X + L X$$

notando:

$$\frac{d}{dt} [LX - \sum_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \dot{q}_i X] = LX + \frac{\partial L}{\partial t} X + \sum_i \left[\cancel{\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \dot{q}_i X} + \cancel{\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \dot{q}_i X} - \cancel{\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \dot{q}_i X} - \cancel{\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \dot{q}_i X} - \cancel{\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \dot{q}_i X} \right]$$

$$\text{então } N = \frac{d}{dt} \left[\sum_i \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \psi_i - \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \dot{q}_i X \right) + LX \right] = -\frac{dC}{dt}$$

$$\text{ou, pela def de } h = \sum_i \dot{q}_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - L$$

$$N = \frac{d}{dt} \left[\sum_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \psi_i - hX \right] \quad \text{Assim: } N = 0 \rightarrow C = \text{cte} \Leftarrow$$